Helymeghatározás alapjai – gyakorlat

Hollósi Gergely
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2015. szeptember 29.

1. Lineáris algebra ismétlés

Az alapvető dolgokat nem részletezzük, ismertnek tételezzük fel, mint például:

- mátrix fogalma
- szorzás, összeadás, kivonás
- lineáris függetlenség
- vektorterek, bázis
- determináns
- inverz

1.1. Norma

Egy adott V vektortéren értelmezhetünk egy ún. normát (p), amely a vektortér elemeihez egy valós számot rendelnek. A normának meg kell felelnie az alapvető norma feltételeknek is:

1. $p(a\mathbf{v}) = |a|p(\mathbf{v})$
2. $p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v})$
3. $p(\mathbf{v}) = 0$, akkor $\mathbf{v}$ a nullvektor

A legismertebb norma az Euklideszi-norma, amely a koordináták négyzetes összegének a gyöke:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{1}$$

A norma fogalma kiterjeszthető mátrixokra is, amely esetben mátrix normákról beszélünk. A legismertebb mátrix norma a Frobenius norma, amely az Euklideszi norma ekvivalens megfelelője:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |A_{ij}|^2} \tag{2}$$

1.2. Ortogonális mátrixok

Amennyiben egy $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, akkor a mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy csak négyzetes mátrix lehet ortogonális. Az ortogonális mátrix általánosítása az unitér mátrix, amennyiben $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Fontos kiemelni, hogy az ortogonális és unitér mátrixok normatartók, tehát

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \tag{3}$$

Ortogonális mátrix például a forgatási mátrix. A két dimenziós forgatási mátrix felírható

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{4}$$

formában. Ebből könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2\times 2} \tag{5}$$

A forgatási mátrixra nyilvánvaló, hogy normatartó, hiszen egybevágósági transzformáció.

1.3. Magtér és képtér

Legyen egy lineáris leképezés $\varphi : V \to W$ vektorterek között, ahol V a tárgytér. Ekkor a leképezés képtere

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists\ \mathbf{v} \in V :\ \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \tag{6}$$

A képtér tehát azon vektorok összessége a W térben, amelyekre a φ operátor leképzést hajt végre. Hasonlóan fontos az operátor magtere (nulltere), amely azon vektorok összessége a V térben, amelyeket az operátor a nullvektorra képez le:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\, \mathbf{v} \in V \mid \varphi(\mathbf{v}) = 0 \,\} \tag{7}$$

A dimenziótétel szerint a magtér és a képtér dimenziójának összege a tárgytér dimenziójával egyezik meg.

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V_1 \tag{8}$$

1.4. Sajátérték és sajátvektor

Legyen $\mathbf{A}$ egy lineáris leképzés mátrixsza! Ha egy adott $\mathbf{v}$ vektorra és λ skalárra igaz, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{9}$$

akkor a λ számot a leképzés sajátértékének, a $\mathbf{v}$ vektort a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük. A sajátértékek meghatározása a karakterisztikus polinom alapján történik:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{10}$$

A sajátértékek ismeretében a sajátvektorokat a homogén egyenletrendszer alapján számítjuk:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \tag{11}$$

Mivel egy sajátvektor skalárszorosa is érvényes sajátvektor, ezért a gyakorlatban általában a $\|\mathbf{v}\| = 1$ hosszúságra normált sajátvektorokat szoktuk alkalmazni.

A sajátérték szemléletes jelentése a következő: amennyiben egy $\mathbf{A}$ transzformációnak $\mathbf{v}$ sajátvektora, akkor a transzformáció a $\mathbf{v}$ vektornak csak a hosszát változtatja (nyújt), az irányát nem. A nyújtás mértékét a λ sajátérték adja meg.

Példa Legyen egy három dimenziós forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a forgatás tengelyét és szögét!

Megoldás Egy forgatási mátrix tengelye a forgatás során nem változik, tehát az a forgatás sajátvektora, valamint a hozzá tartozó sajátérték $\lambda = 1$. Tehát keressük az a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & -0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

A középső sor megfelelő skalárszorosát kivonva az első és utolsó sorból, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nyilvánvaló, hogy a tengely a $\mathbf{v} = [1, 1, 0]^T$ vektorral párhuzamos, origón áthaladó egyenes. A szög megállapításához válasszunk egy erre merőleges vektort, például az $\mathbf{a} = [0, 0, 1]$ vektort! Könnyű észrevenni, hogy $\mathbf{Ra} \perp \mathbf{a}$, így a forgatás szöge 90 fok.

A *spektrálfelbontás* szerint, ha egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix diagonizálható, tehát létezik egy hozzá hasonló diagonálmátrix, azaz létezik olyan $\mathbf{P}$ invertálható transzformáció, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \tag{12}$$

Ekkor a $\mathbf{P}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ sajátvektorai, a λ_i pedig az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. Azt mondhatjuk tehát, hogy a diagonizálható mátrix a sajátvektorai bázisában egyszerű skálázási transzformációvá változik. Diagonizálható mátrixok pl. a szimmetrikus mátrixok.

1.5. Singular Value Decomposition

Egy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix, melynek mérete $M \times N$ felbontható három speciális mátrix szorzatára:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \tag{13}$$

Az $\mathbf{U}$ mátrix $M \times M$ méretű, unitér mátrix, a $\mathbf{V}$ mátrix $N \times N$ méretű unitér mátrix, míg a $\mathbf{\Sigma}$ mátrix egy $M \times N$ méretű diagonálmátrix (csak a főátlóbeli elemei különböznek nullától). A $\mathbf{U}$ mátrix oszlopait baloldali szinguláris vektoroknak, míg a $\mathbf{V}$ mátrix oszlopait jobboldali szinguláris vektoroknak nevezzük. A $\mathbf{\Sigma}$ mátrix főátlóbeli elemeit szinguláris értékeknek hívjuk, amelyek mindig nemnegatív valós számok.

Az SVD felbontás meghatározását nem tárgyaljuk, azt mindig adottnak tekintjük. A felbontás kiemelkedő fontossága, hogy tetszőleges lineáris probléma megoldásában hatékonyan hasznosítható, ide értjük például a lineáris egyenletrendszerek megoldását is.

2. Egyenletrendszerek megoldása

A korábban megismert fogalmak segítségével áttekintjük a lineáris és nem lineáris egyenletrendszerek megoldását. Kiemelt esetként kezeljük a homogén egyenletrendszerek megoldását.

2.1. Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása

Tekintsük első lépésként a lineáris homogén egyenletrendszerek megoldását. A homogenitás jelentése, hogy az egyenletrendszer felírható

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{14}$$

alakban, ahol $\mathbf{A}$ ismert, $M \times N$ méretű mátrix, és keressük az $\mathbf{x}$ $N \times 1$ méretű paraméter vektort. Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{x}$ megoldása az egyenletrendszernek, akkor $k\mathbf{x}$ is megoldása az egyenletrendszernek ($k \in \mathbb{C}$). Az is nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorok megoldásai az egyenletrendszernek, akkor azok lineáris kombinációi is megoldások, hiszen például

$$\mathbf{A}(k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2) = k_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \tag{15}$$

Fontos megjegyezni még, hogy a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldás érdektelen számunkra.

A problémát átfogalmazhatjuk úgy is, hogy keressük azokat a vektorokat, amelyek $\mathbf{A}$ lineáris transzformáció magterét alkotják. Legyen $\mathbf{A}$ SVD felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$! Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{16}$$

Legyen $\mathbf{y} = \mathbf{V}^H\mathbf{x}$, amiből nyilván $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{y}$. Ekkor írhatjuk, ha $N > M$, hogy

$$\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \cdots \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_m & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{17}$$

Megállapíthatjuk, hogy a megoldások az olyan vektorok, amelyre igaz, hogy

$$y_i = \begin{cases} 1 & \sigma_i = 0 \quad \text{vagy} \quad i > m \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{18}$$

A megoldás $\mathbf{x}$-re tehát a $\mathbf{V}$ mátrix azon oszlopai, amelyek szinguláris értékei nulla értékűek, vagy az indexe nagyobb, mind az $\mathbf{A}$ mátrix kisebbik mérete.

Példa (Forrás: Wikipédia) Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^H$$

Adjuk meg az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszer nullától különböző megoldásait!

Megoldás Láthatjuk, hogy a mátrixnak van egy nulla értékű sajátértéke, és egy, a kisebbik méretnél nagyobb indexű oszlopa a $\mathbf{V}$ mátrixnak. A megoldás tehát a két utolsó oszlop lineáris kombinációja:

$$\mathbf{x} = k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

A kérdés az, hogy mit tehetünk, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak nincs nulla szinguláris értéke, és a méreteire igaz, hogy $M > N$? Ebben az esetben megoldás nem létezik, ugyanakkor lehetőségünk nyílik a legkisebb négyzetes eltérés minimalizálására. Keressük tehát azt az $\mathbf{x}$ vektort, amelyre

$$\|\mathbf{Ax}\| \tag{20}$$

kifejezés minimális. Legyen ugyancsak $\mathbf{A}$ SVD felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^H$! Ekkor

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{U\Sigma V}^H\mathbf{x}\| = \|\mathbf{\Sigma V}^H\mathbf{x}\| \tag{21}$$

Az előzőekben bemutatott eszmefuttatás segítségével azt kapjuk, hogy a megoldás a legkisebb szinguláris értékhez tartozó oszlopa a $\mathbf{V}$ mátrixnak.

2.2. Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása

Inhomogén lineáris egyenlet alatt a következő formában felírt egyenletrendszert értjük:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{22}$$

ahol $\mathbf{A}$ mátrix $M \times N$ méretű és ismert, $\mathbf{b}$ vektor $M \times 1$ méretű és ismert, és $\mathbf{x}$ vektor az $N \times 1$ méretű ismeretlen paramétervektor.

Amennyiben $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor a megoldás nem egyértelmű, hanem egy többdimenziós vektortér.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $M \times N$ méretű nem négyzetes mátrix, akkor lehetővé válik a legkisebb négyzetes eltéréssel bíró megoldás megkeresése, azaz a

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \tag{23}$$

mennyiség minimalizálása. Amennyiben az $\mathbf{A}$ mátrix rangja $\min(M, N)$, akkor a megoldás a pszeudoinverzzel számítható:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{24}$$

2.3. Nem lineáris egyenletek megoldása

A nem lineáris egyenletrendszerek általános formája a

$$\mathbf{X} = f(\mathbf{P}) \tag{25}$$

egyenlet. Itt $\mathbf{X}$ az ismert $N \times 1$ méretű mérési vektor, $\mathbf{P}$ pedig az $M \times 1$ méretű ismeretlen paramétervektor.

A megoldás bemutatása során csak a jól ismer Newton-Gauss módszerrel foglalkozunk. A $\mathbf{P}$ keresése során iteratív módon az f függvény az adott pontban linearizáljuk, majd lineárisnak tekintve az egyenletet megoldjuk a következő $\mathbf{P}$ paraméterre.

Tételezzük fel, hogy f lineáris a $\mathbf{P}_n$ pontban, tehát felírható $f(\mathbf{P}_n + \Delta) = f(\mathbf{P}_n) + J\Delta$ alakban, ahol J az f Jacobi mátrixsza. Keressük azt a $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + \Delta$ pontot, amelyre az

$$f(\mathbf{P}_{n+1}) - \mathbf{X} = f(\mathbf{P}_n) + J\Delta - \mathbf{X} \tag{26}$$

minimális. Ez lineáris minimalizálási probléma, amely a pszeudoinverzzel oldható meg:

$$\Delta_n = -(J^T J)^{-1} J^T (f(\mathbf{P}_n) - \mathbf{X}) \tag{27}$$

A megoldás során tehát iteratív módon közelítjük meg a minimumot és keressük meg a megoldást:

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + \Delta_n \tag{28}$$

3. Valószínűségi becslés

A valószínűségi becslést Kalman-szűrővel és kiterjesztett Kalman-szűrővel végezzük. A valószínűségi becsléselméletet részletesen az elméleti órán tárgyaltuk.

3.1. Kalman-szűrő

A lineáris Kalman-szűrő az alábbi állapotegyenlettel dolgozik:

$$\begin{aligned} x_k &= A_{k-1} x_{k-1} + q_{k-1} \qquad & q_{k-1} &\sim N(0, Q_{k-1}) \\ z_k &= H_k x_k + r_k & r_k &\sim N(0, R_k) \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet megoldása a predikciós lépésből és a frissítési lépésből áll.

$$
\begin{aligned}
m_k^- &= A_{k-1} m_{k-1} \\
P_k^- &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
\\
v_k &= z_k - H_k m_k^- \\
S_k &= H_k P_k^- H_k^T + R_k \\
K_k &= P_k^- H_k^T S_k^{-1} \\
m_k &= m_k^- + K_k v_k \\
P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T
\end{aligned} \tag{29}
$$

3.2. Kiterjesztett Kalman-szűrő

A kiterjesztett Kalman-szűrő nemlineáris modell becslését teszi lehetővé:

$$
\begin{array}{ll}
x_k = f(x_{k-1}) + q_{k-1} & \quad q_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1}) \\
z_k = h(x_k) + r_k & \quad r_k \sim N(0, R_k)
\end{array}
$$

A predikciós és frissítési lépés:

$$
\begin{aligned}
m_k^- &= f(m_{k-1}) \\
P_k^- &= F_x(m_{k-1}) P_{k-1} F_x^T(m_{k-1}) + Q_{k-1} \\
\\
v_k &= z_k - h(m_k^-) \\
S_k &= H_x(m_k^-) P_k^- H_x^T(m_k^-) + R_k \\
K_k &= P_k^- H_x^T(m_k^-) S_k^{-1} \\
m_k &= m_k^- + K_k v_k \\
P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T
\end{aligned} \tag{30}
$$

4. Feladatok

Példa Legyen egy három dimenziós forgatási mátrix

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}
$$

Határozzuk meg a forgatás tengelyét és szögét!

Megoldás Egy forgatási mátrix tengelye a forgatás során nem változik, tehát az a forgatás sajátvektora, valamint a hozzá tartozó sajátérték $\lambda = 1$. Tehát keressük az a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre:

$$(\mathbf{R}-\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & -0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

A középső sor megfelelő skalárszorosát kivonva az első és utolsó sorból, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nyilvánvaló, hogy a tengely a $\mathbf{v} = [1,1,0]^T$ vektorral párhuzamos, origón áthaladó egyenes. A szög megállapításához válasszunk egy erre merőleges vektort, például az $\mathbf{a} = [0,0,1]$ vektort! Könnyű észrevenni, hogy $\mathbf{Ra} \perp \mathbf{a}$, így a forgatás szöge 90 fok.

Példa Forgassuk el a $\mathbf{p} = [1,2,1]$ vektort a $\mathbf{u} = [1,1,1]$ tengely körül 30 fokkal! Oldjuk meg a feladatot kvaterniók és a Rodrigues formula segítségével is!

Megoldás

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;

u=u/norm(u);
q=quaternion(cosd(a/2),u(1)*sind(a/2),u(2)*sind(a/2),u(3)*sind(a/2));
v=quaternion(0,p(1),p(2),p(3));
pvQ=q*v*inv(q);

K=[0 -u(3) u(2)
u(3) 0 -u(1)
-u(2) u(1) 0];
R=eye(3)+sind(30)*K+(1-cosd(30))*K*K;
pvRodr=R*p';
```

Példa Adja meg az $\mathbf{Ax} = 0$ homogén egyenletrendszer lehetséges megoldásait, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 11 \\ 2 & 9 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Megoldás

```
A=[ 2 1 4 3
    3 8 6 11
    2 9 4 11];
[U,D,V]=svd(A);
```

Ebből következően a megoldás

$$\mathbf{x} = k_1 \begin{bmatrix} -0.880887 \\ 0.053563 \\ 0.467225 \\ -0.053563 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -0.205473 \\ -0.672069 \\ -0.233298 \\ 0.672069 \end{bmatrix}$$

Példa Tegyük fel, hogy egy klasszikus szögmérésen alapuló helymeghatározási rendszerünk létezik. A rendszer adatai, és a felhasználó pozíciója megtalálhatók a mellékelt Octave fájlokban. Határozza meg a felhasználó helyzetét Newton-Gauss iteráció segítségével és Kalman-szűrővel! Keresse meg RANSAC algoritmus segítségével a szögek közül azokat a méréseket, amelyek megfelelnek a szögmérés modelljének.

Megoldás A mérési modell alapja a szögmérés, amelynek az egyenlete

$$\alpha_n = \cos^{-1} \frac{(\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n}{|\ \mathbf{l} - \mathbf{p}_n\ |} + r$$

A mérési modell deriváltja:

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial l_x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{l}-\mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n}{|\mathbf{l}-\mathbf{p}_n|}\right)^2}} \left(\frac{r_x|\mathbf{l} - \mathbf{p}_n| - (\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n \frac{1}{|\mathbf{l}-\mathbf{p}_n|}(l_x - p_x)}{|\mathbf{l} - \mathbf{p}_n|^2} \right)$$

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial l_y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{l}-\mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n}{|\mathbf{l}-\mathbf{p}_n|}\right)^2}} \left(\frac{r_y|\mathbf{l} - \mathbf{p}_n| - (\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n \frac{1}{|\mathbf{l}-\mathbf{p}_n|}(l_y - p_y)}{|\mathbf{l} - \mathbf{p}_n|^2} \right)$$

A Newton-Gauss iteráció: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (J^T J)^{-1} J^T (f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$