Hullámterjedés alapú helymeghatározási módszerek

Hollósi Gergely[1]

[1]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2015

Iránymérésen alapuló megoldások

Iránymérés módszere

Iránymérésen alapuló megoldások

- Az iránymérés feladata a beérkező rádióhullám forrás irányának meghatározása
- Tipikusan saját koordinátarendszerben
- Általánosan elterjedt módszer a fázis alapú mérés
  - A rádióhullám fázisa a térben változik
  - Mérjünk több pontban! $\rightarrow$ antenna tömb
- Többutas terjedés komoly gond!

Hullámterjedés áttekintés

Iránymérésen alapuló megoldások

- Általánosságban keskenysávú modell → sávszélesség kicsiny a vivőhöz képest
  - modulált jel: $s(t)e^{j\omega t}$
- Terjedési irány
  - Általában radiális irányban
  - Gyakran izotróp
- Terjedési sebesség: c
  - például rádióhullám levegőben: $c \sim 3 * 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Jelerősség távolsággal arányos
  - $E \sim \dfrac{1}{r}$ és $P \sim \dfrac{1}{r^2}$
  - Tipikusan a teljesítmény a releváns

Hullámterjedés áttekintés – fázisviszonyok

Iránymérésen alapuló megoldások

- Nézzünk egy modulálatlan síkhullámot!
- Az adóantennánál: $r(t) = e^{j\omega t}$
- s távolsággal messzebb a jel korábbi állapotát látjuk:

$$r(t) = e^{j\omega(t-\tau)} = e^{j\omega(t-\frac{s}{c})}$$

- A fázisváltozás található a két hely között

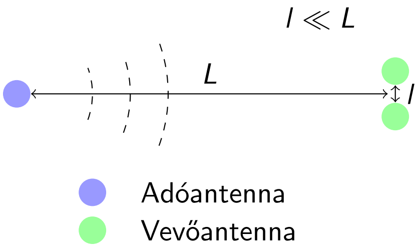
$$\Delta\varphi = -\omega\frac{s}{c} = -2\pi f\frac{s}{c} = -\frac{2\pi s}{\lambda}$$

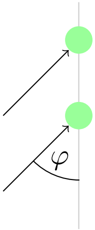
- Hullámhosszonként a fázis teljesen átfordul
  - Például $f = 2.7\,\mathrm{GHz} \rightarrow \lambda \simeq 11.1\,\mathrm{cm}$
  - Nagyon érzékeny a távolságra

Szögmérés alapelve

Iránymérésen alapuló megoldások

- Az adó és vevő közötti távolság nagy a vevőantennák távolságához képest
- Párhuzamosnak tekinthetjük a beérkező jeleket
- A beérkezési idő az antennák között elhanyagolható (!)





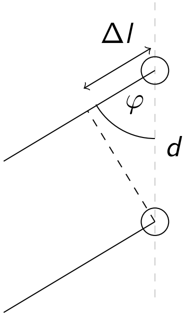
Szögmérés alapelve

Iránymérésen alapuló megoldások

- A megoldás a fázis és a távolság közötti összefüggésre épít
- A két antenna közötti vételi fáziskülönbség:

$$-\frac{2\pi\Delta l}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} d\cos\varphi$$

- A fáziskülönbség méréséből tehát számítható a a beérkezés szöge (φ)



Szögmérés alapelve

Iránymérésen alapuló megoldások

- A szögmérés gyakorlatilag így nem valósítható meg
- A legkisebb többutas terjedésből származó hiba is elrontja

$$s^r(t) = \sum_k A_k s(t - \tau_k) e^{-j(\omega^t \tau_k + \varphi_0)}$$

- A megoldás antennatömbök használata

Antenna tömbök

Iránymérésen alapuló megoldások

- RF jel vételi lehetőségeinek javítása
- Többutas terjedés kihasználása, jelek helyreállítása
- Térbeli diverzitás (spatial diversity) $\rightarrow$ antenna tömbök
- Sugárzási és vételi minta irányítható
  - hasznos például a zavarjelek elnyomásában
  - irányszelektív vétel

Antenna tömbök

Iránymérésen alapuló megoldások

- Nézzük egy rádióhullám fázisviszonyait egy antennán!
- Megkötés: az antennatömb mérete sokkal kisebb, mint az adótól való távolság
  - A terjedési irányok párhuzamosnak tekinthetők
- Láttuk, hogy

$$r(t) = e^{j\omega(t-\tau)} = e^{j\omega(t-\frac{s}{c})} = e^{j(\omega t-\omega\frac{s}{c})}$$

- A terjedési irányban való távolság számít!
- Az irány: $\mathbf{k} \propto (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, ahol
  - gömbi polárkoordináták
  - φ az azimuth
  - θ az elevation

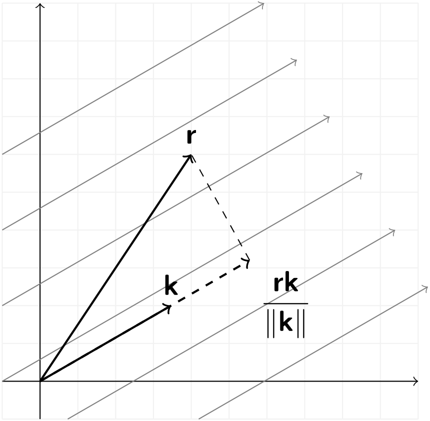
Antenna tömbök

Iránymérésen alapuló megoldások

- $\mathbf{k}$ a terjedési irány, $\mathbf{r}$ az antenna helye
- A hossz tehát skaláris szorzattal számítható
- $\mathbf{k}$-nak csak az iránya számít
- Legyen $\|\mathbf{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$, ekkor

$$\boxed{\Delta\varphi = -\omega\frac{s}{c} = -\frac{2\pi}{\lambda}s = -\mathbf{kr}}$$

- Az origó a referencia, $\Delta\varphi_O = 0$



Antenna tömbök – ,,Steering vektor''

Iránymérésen alapuló megoldások

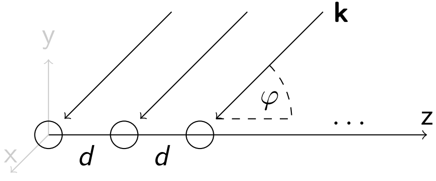
- Az antennatömbök legfontosabb jellemzője az ún. ,,steering vektor''
- Megadja, hogy egy φ, θ irányból érkező hullámfront milyen fázisviszonyokat eredményez a tömbben
- Jele: $\mathbf{a}(\varphi)$
- N elemű antennatömbre $N \times 1$ méretű
    - Az i-dik elem az i-dik antenna fázisforgatását jelenti

Antenna tömbök – ULA

Iránymérésen alapuló megoldások

- ULA – Uniform Linear Array
  - N darab egy vonalban, egyenletesen elhelyezkedő antenna
- $\mathbf{r}_n = (0, 0, nd) \quad n = 0 \ldots N-1$

$$\boxed{-\mathbf{k}\mathbf{r}_n = -\frac{2\pi}{\lambda} nd \cos\varphi}$$



- A steering vektor tehát:

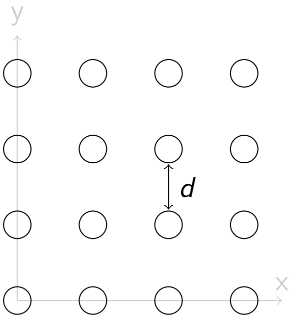
$$\mathbf{a}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\frac{2\pi d \cos\phi}{\lambda}} & \ldots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)d\cos\phi}{\lambda}} \end{bmatrix}^T$$

- Csak az azimuth-tól függ!

Antenna tömbök – Négyzetrács

Iránymérésen alapuló megoldások

- $N \times M$ darab, egyenletes rácson elhelyezkedő antenna
- $\mathbf{r}_{n,m} = (nd, md, 0)$
  $n = 0 \ldots N-1, \; m = 0 \ldots M-1$

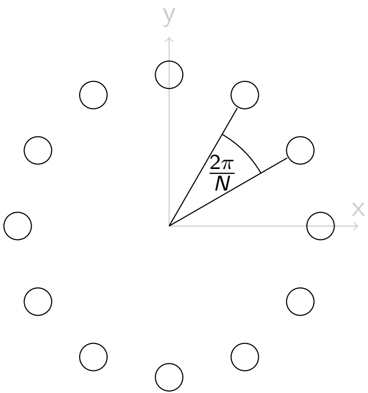


$$\boxed{-\mathbf{k}\mathbf{r}_{n,m} = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(nd \sin\varphi \cos\theta + md \sin\varphi \cos\theta\right)}$$

Antenna tömbök – Radiális tömb

Iránymérésen alapuló megoldások

- N darab, körben, egyenletesen elhelyezkedő antennák
- $\mathbf{r}_n = (R\cos\frac{2\pi}{N}n, R\sin\frac{2\pi}{N}n, 0)$
  $n = 0 \ldots N-1$



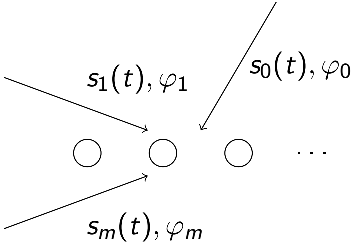
$$\boxed{-\mathbf{k}\mathbf{r}_n = -\frac{2\pi}{\lambda}\left[R\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\sin\varphi\cos\theta + R\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\sin\varphi\cos\theta\right]}$$

Az iránymeghatározási egyenlet

Iránymérésen alapuló megoldások

- Miként határozzuk meg a beérkezési irányokat többfelhasználós környezetben (korrelálatlan zaj) és többutas terjedés alatt (korrelált zaj)?

- Legyen N darab antennánk! Ekkor az $\mathbf{a}(\varphi)$ vektor N elemű.
- Tételezzük fel, hogy a tömböt M darab $s_m(t)$ jel éri párhuzamosan, mindegyik φ_m irányból



Az iránymeghatározási egyenlet

Iránymérésen alapuló megoldások

- Ezek alapján az egyenlet:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\varphi_1) & \mathbf{a}(\varphi_2) & \cdots & \mathbf{a}(\varphi_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_M(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t)
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{n}(t)$ az $N \times 1$ zajvektor, amiről feltételezzük, hogy normális eloszlású
- Az egyenlet diszkrét időpillanatokban is megfogalmazható, ebben az esetben az $\mathbf{s}$ mátrix $M \times L$ méretű és az $\mathbf{x}$ mátrix $N \times L$ méretű, ahol L a minták száma

Az iránymeghatározási egyenlet

Iránymérésen alapuló megoldások

- Példa az iránymeghatározási egyenletre
- ULA elrendezés

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
s_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
N_{\mathrm{ULA}} &= 3 \\
d &= 10\mathrm{cm} \\
f &= 2.4\mathrm{GHz} \\
\varphi_1 &= 20^o \\
\varphi_2 &= 80^o
\end{aligned}
$$

Beamforming

Iránymérésen alapuló megoldások

- Megoldások korrelált és korrelálatlan jelekre
- Beamforming megoldások
  - klasszikus
  - Capon
- MUSIC
- ESPIRIT
- stb.

Beamforming

Iránymérésen alapuló megoldások

- A különböző antennákon beérkező jeleket súlyozva összegezzük $\rightarrow$ adott irányban szelektív lesz a vétel

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i^* x_i(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

- A jelteljesítmény

$$P(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N} |y(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N} \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}$$

- $\hat{\mathbf{R}}$ a tapasztalati kovarianciamátrix
- A teljesítmény maximális, amennyiben $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\varphi)$
- Az irányok a $P(\varphi) = \mathbf{a}^H(\varphi) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\varphi)$ spektrum maximumai

Capon beamforming

Iránymérésen alapuló megoldások

- A klasszikus megoldás felbontása nem elég jó, közeli irányokat nem tud szétválasztani
- Lehetséges az adott iránytól eltérő jelek minimalizálása is $\rightarrow$ némileg jobb felbontása van
- Ebben az esetben a Capon spektrum maximumait kell keresni

$$P_{\mathrm{CAPON}}(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\varphi)\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{a}(\varphi)}$$

MUSIC – Multiple Signal Classification

Iránymérésen alapuló megoldások

- Korrelálatlan jelekre:

$$E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^H\right] = E\left[\mathbf{A}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{A}^H\right] + E\left[\mathbf{n}\mathbf{n}^H\right]$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I}$$

- $\mathbf{S}$ pozitív diagonál mátrix, mérete $M \times M$, tehát rangja maximum M $\rightarrow$ $\mathbf{R}_s$ tehát $N \times N$ méretű, $M < N$ rangú mátrix
- Van olyan $\mathbf{q}_n$ sajátvektor, amelyre

$$\mathbf{R_s}\mathbf{q}_n = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_n^H\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$$

- Tehát $\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$, így $\mathbf{q}_n$ merőleges az M darab steering vektorra
- $\mathbf{q}_n$ tehát a zajhoz tartozó sajátvektor, a nem nulla sajátértékekhez tartozó vektorok pedig a jelek sajátvektorai

MUSIC – Multiple Signal Classification

Iránymérésen alapuló megoldások

- Korrelálatlan jelekre:

$$E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^H\right] = E\left[\mathbf{A}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{A}^H\right] + E\left[\mathbf{n}\mathbf{n}^H\right]$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I}$$

- $\mathbf{S}$ pozitív diagonál mátrix, mérete $M \times M$, tehát rangja maximum M $\rightarrow$ $\mathbf{R}_s$ tehát $N \times N$ méretű, $M < N$ rangú mátrix
- Van olyan $\mathbf{q}_n$ sajátvektor, amelyre

$$\mathbf{R}_s\mathbf{q}_n = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_n^H\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$$

- Tehát $\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$, így $\mathbf{q}_n$ merőleges az M darab steering vektorra
- $\mathbf{q}_n$ tehát a zajhoz tartozó sajátvektor, a nem nulla sajátértékekhez tartozó vektorok pedig a jelek sajátvektorai

1. $\mathbf{S}$ pozitív diagonál mátrix, ugyanis

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} E[s_1^2(t)] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E[s_2^2(t)] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E[s_M^2(t)] \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{q}_n^H\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$, korábban láttuk, hogy $\mathbf{S}$ pozitív diagonál mátrix, így pozitív definit mátrix, amiből következik, hogy $\mathbf{A}^H\mathbf{q}_n = 0$

MUSIC – Multiple Signal Classification

- Feladat megkeresni a zaj sajátvektorokra merőleges steering vektorokat
- MUSIC spektrum:

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N-M} |\mathbf{s}^H(\varphi)\mathbf{q}_n|^2} = \frac{1}{\mathbf{s}^H(\varphi)\mathbf{Q}_n\mathbf{Q}_n^H\mathbf{s}(\varphi)}$$

- Nagyon robusztus megoldás, de számításigényes
  - Root-MUSIC $\rightarrow$ speciális elrendezésekre zárt megoldás
- Csak korrelálatlan jelekre
  - Spatial Smoothing $\rightarrow$ kovarianciamátrix korrelált jelekre

MUSIC – Multiple Signal Classification

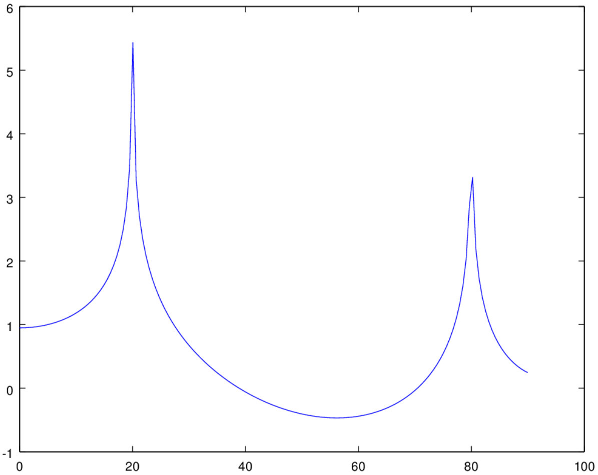
Iránymérésen alapuló megoldások

- Nézzünk egy egyszerű példát, ULA antennákra!
- Két beérkező jel:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
s_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
N_{\text{ULA}} &= 3 \\
d &= 10\mathrm{cm} \\
f &= 2.4\mathrm{GHz} \\
\varphi_1 &= 20^o \\
\varphi_2 &= 80^o
\end{aligned}
$$

MUSIC – Multiple Signal Classification

Iránymérésen alapuló megoldások



ESPIRIT – Estimation of Signal Parameters using Rotational Invariance Techniques

- Zárt megoldás speciális felépítésekre
- Tételezzük fel, hogy A speciális felépítésű:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^N & z_2^N & \cdots & z_M^N \end{bmatrix}$$

- Ún. Vandermonde–mátrix
- Például az ULA is ilyen

ESPIRIT

Iránymérésen alapuló megoldások

- Képezzük az A_1 és A_2 mátrixokat!

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^N & z_2^N & \cdots & z_M^N \end{bmatrix}$$

- Nyilván $A_2 = A_1\Phi$, ahol Φ diagonálmátrix a $z_1, z_2, \ldots, z_M$ elemekkel
- Φ sajátértékei éppen a keresett z_m számok
- Innen származik a rotáció invariancia

ESPIRIT

Iránymérésen alapuló megoldások

- Tudjuk, hogy a kovarianciamátrix

$$R_s = ASA^H + \sigma^2 I = U_s \Lambda_s U_s^H + \sigma^2 U_n U_n^H$$

- U_s az R_s legnagyobb M sajátértékéhez tartozó sajátvektorokból áll
- U_s és A azonos teret feszítenek ki, így létezik olyan T

$$U_s = AT$$

- Képezhetjük $U_1 = A_1 T$ és $U_2 = A_2 T$ mátrixokat U_s-ből, hasonlóan, mint az A_1 és A_2 mátrixokat

ESPIRIT

Iránymérésen alapuló megoldások

- Ekkor láthatjuk, hogy

$$U_2 = A_2 T = A_1 \Phi T = U_1 T^{-1} \Phi T = U_1 \Psi$$

- Itt $\Psi = T^{-1} \Phi T$
- Ψ és Φ hasonló mátrixok, így sajátértékeik megegyeznek!
- Ψ számítható tetszőleges LS módszerrel
  - Például pszeudo-inverz

- Az ESPIRIT egyszerű és hatékony
- Nem olyan robusztus, mint a MUSIC algoritmus

Jelek számának meghatározása

Iránymérésen alapuló megoldások

- A módszerek során implicit feltételeztük, hogy ismert a jelek száma
- Valóságban nehezen saccolható meg
- Több jel → több paraméter → rosszabb stabilitás és kevésbé robusztus

- A zajhoz tartozó sajátértékek a zaj varianciáját jelképezik
  - kereshetők a legkisebb, azonos értékű sajátértékek
- Leggyakrabban hipotézis tesztelő megoldásokat alkalmaznak
  - Akaike Information Criterion (AIC) → a legjobb illeszkedő modell meghatározása
  - Minimum Description Length → a legegyszerűbb modell meghatározása